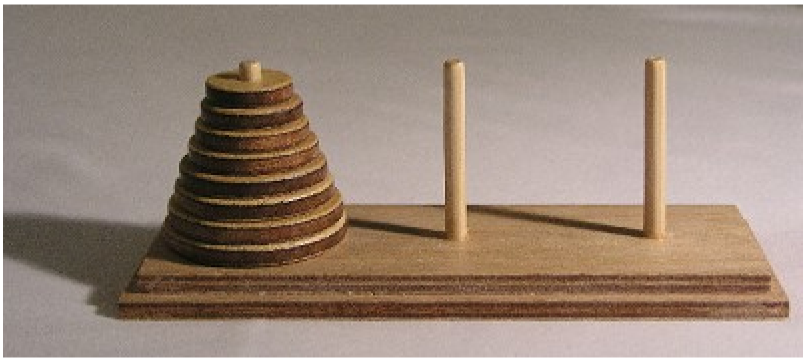
Problème des tours de Hanoï

Présentation

Le but est de déplacer n disques de diamètres différents, d'une tour initiale (celle de gauche) à une tour finale (celle de droite) en passant par une tour intermédiaire (celle du milieu).

Initialement, tous les disques sont empilés sur la tour initiale, du plus grand au plus petit.



Les règles de déplacement sont les suivantes :

- On ne peut bouger qu'un seul disque à la fois.
- On ne peut déplacer un disque que vers une tour vide, ou sur un disque plus grand.

> Le problème mathématique des tours de Hanoï a été inventé par Édouard Lucas (1842-1891). Il est publié dans le tome 3 de ses Récréations mathématiques, parues à titre posthume en 1892. Il annonce que ce problème est dû à un de ses amis, N. Claus de Siam, prétendument professeur au collège de Li-Sou-Stian (une double anagramme de Lucas d'Amiens, sa ville de naissance, et Saint Louis, le lycée où Lucas enseignait).
>
> Sous le titre « Les brahmes tombent », Lucas relate que « N. Claus de Siam a vu, dans ses voyages pour la publication des écrits de l'illustre Fer-Fer-Tam-Tam, dans le grand temple de Bénarès, au- dessous du dôme qui marque le centre du monde, trois aiguilles de diamant, plantées dans une dalle d'airain, hautes d'une coudée et grosses comme le corps d'une abeille. Sur une de ces aiguilles, Dieu enfila au commencement des siècles, 64 disques d'or pur, le plus large reposant sur l'airain, et les autres, de plus en plus étroits, superposés jusqu'au sommet. C'est la tour sacrée du Brahmâ. Nuit et jour, les prêtres se succèdent sur les marches de l'autel, occupés à transporter la tour de la première aiguille sur la troisième, sans s'écarter des règles fixes que nous venons d'indiquer, et qui ont été imposées par Brahma. Quand tout sera fini, la tour et les brahmes tomberont, et ce sera la fin des mondes !».

Un jeu à 64 disques requiert un minimum de $2^{64} - 1$ déplacements. En admettant qu'il faille 1 seconde pour déplacer un disque, ce qui fait 86.400 déplacements par jour, la fin du jeu aurait lieu au bout d'environ 213.000 milliards de jours, ce qui équivaut à peu près à 584,5 milliards d'années, soit 43 fois l'âge estimé de l'univers (13,7 milliards d'années selon certaines sources).

La stratégie est la suivante :

Divisons pour n disques en trois partie :

1. transporter les n − 1 plus petits disques vers la tour du milieu
2. transporter le plus grand disque sur la tour de droite
3. transporter les n − 1 plus petits disques vers la tour de droite

Le problème a donc une solution récursive, si on s’autorise d’échanger :

- la tour de départ
- la tour d’arrivée
- la tour intermédiaire

A vous de jouer